

**Étudiant** : Arthur LAURENT, Jules VERBRUGGHE, Ronan DUPONT

# COMPTE RENDUE DE TP SPINDOWN EN REPÈRE TOURNANT - FORCE DE CORIOLIS ETCOUCHE D'EKMAN

TRAVAUX PRATIQUES DE MÉCANIQUE DES FLUIDES

**Enseignante référent** : Damien SOUS, Professeur des universités

**Année Universitaire 2019/2020**

# 1 Introduction

L'étude de la force de Coriolis et de la couche d'Ekman, permettent de mieux comprendre des mouvement réel à l'échelle planétaire, comme dans les océans. Lors de ce nous avons donc étudié ces phénomènes en accélérant la rotation du contenant du fluide. Le but est de comprendre le modèle théorique qui lie la vitesse de rotation du fluide à celle de la cuve, et remarquer l'importance de la couche d'Ekman.

## 2 Partie Théorique

### Question 1 :

L'écoulement intérieur initial est celui d'une rotation solide de vorticité absolue égale à  $2\Omega_i$ .

Ainsi,  $\omega_a = 2\Omega_i$

Or,  $\omega_a = \omega + 2\Omega_f$ , donc  $\omega = 2(\Omega_i - \Omega_f)$ .

- Dans le cas du spin-up :  $\Delta\Omega = \Omega_f - \Omega_i > 0$  donc  $\boxed{\omega < 0}$ .

On observera alors un mouvement relatif à la cuve dans le sens négatif à la suite du changement de vitesse.

- Dans le cas du spin-down :  $\Delta\Omega = \Omega_f - \Omega_i < 0$  donc  $\boxed{\omega > 0}$ .

On observera alors un mouvement relatif à la cuve dans le sens positif à la suite du changement de vitesse.

### Question 2 :

Nous savons que  $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{f}} = \sqrt{\frac{T_f\mu}{4\pi}}$  avec  $T_f = 40s$  et  $\mu = 1,31.10^{-6}m^2s^{-1}$ .

On a donc :  $\delta = 0,2mm$  et  $D = 8cm \Rightarrow \boxed{\delta \ll D}$ .

On pourra alors négliger l'effet de la couche d'Ekman dans la suite de la recherche théorique.

### Question 3 :

Il y a conservation de la composante azimutale de la quantité de mouvement. Nous intéressons à un volume  $v = \int(r.dr.H)$  et  $S = \int(r.dr)$  qui est la base de l'anneau.

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho\theta)}{dt} &= \sum F_{ext} \\ \Rightarrow \rho V \frac{d(v_\theta)}{dt} &= \tau S \\ \Rightarrow \rho H \frac{d(v_\theta)}{dt} &= -\rho u_*^2 \end{aligned}$$

$$H \frac{d(v_\theta)}{dt} = -u_*^2$$

#### Question 4 :

On a  $u_*^2 = -\nu \frac{U_\theta}{\delta}$ , il en découle l'équation différentielle :

$$\frac{d(v_\theta)}{dt} + \frac{\mu}{H\delta} U_\theta$$

On résout l'équation,

$$U_\theta(r, t) = C \exp\left(-\frac{\mu}{H\delta} t\right) \quad \text{et} \quad U_\theta(r, 0) = C$$

Finalement,

$$\boxed{U_\theta(r, t) = U_\theta(r, 0) e^{(-\frac{t}{T_E})}} \quad \text{où} \quad T_E = \frac{H\delta}{\mu}$$

#### Question 5 :

On a  $U_\theta$  linéaire par rapport à  $r$  donc  $U_\theta = U_\theta(R) * r$ . On note  $\alpha$  le coefficient de frottement.

- Calcul de la résultante des forces de frottement sur le fond de la cuve :

$$\begin{aligned} F_f &= \alpha \int_0^R 2\pi r^2 U_\theta(R) dr \\ &= \alpha U_\theta(R) \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

- Calcul de la résultante des forces de frottement sur la paroi latérale :

$$\begin{aligned} F_p &= \alpha \int_0^H 2\pi R^2 C_1 dr \\ &= 2\pi \alpha U_\theta(R) R^2 H \end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\frac{F_p}{F_f} = \frac{R}{3H}}$ .

Or  $R = 40\text{cm}$  et  $H = 8\text{cm}$  donc  $F_f \simeq 2F_p$ .

#### Question 6 :

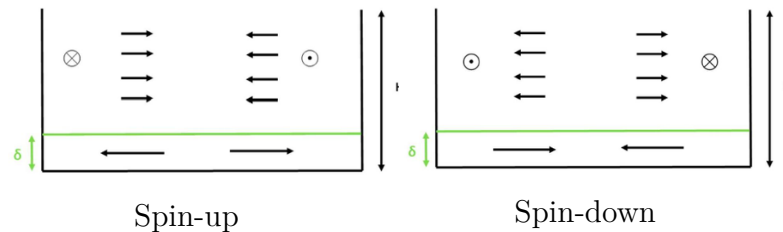
$$M_r = \int_0^{10\delta} u_r dz = -\frac{U_\theta \delta}{2}$$

- Dans le cas du spin-up,  $U_\theta < 0$ , on a donc  $M_r > 0$ . Les particules dans la couche d'Ekman se dirige donc vers la parois.

- Dans le cas du spin-down,  $U_\theta > 0$ , on a donc  $M_r < 0$ . Les particules dans la couche d'Ekman se dirige donc vers le centre.

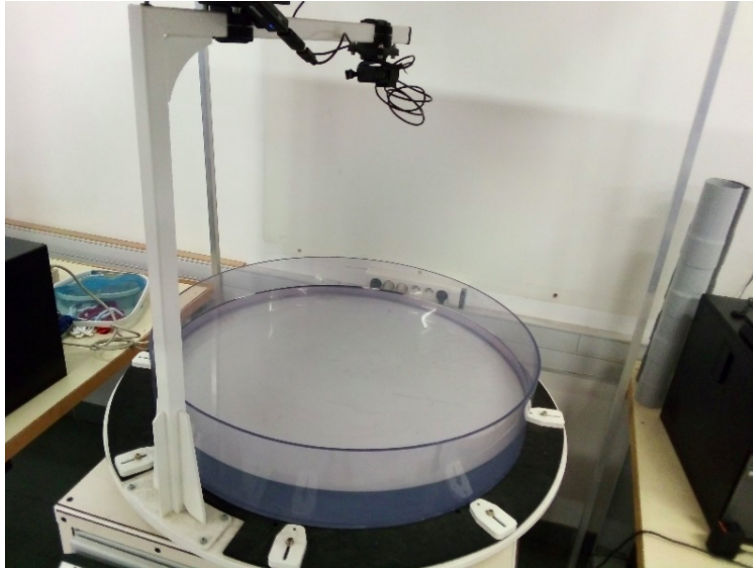
### Question 7 :

Pour compenser le transport d'Ekman de fond, les particules de l'écoulement intérieur vont se déplacer dans le sens inverse de celles du transport d'Ekman (voir schéma).



### 3 Partie Expérimentale

Le travail expérimental que nous avons à effectuer consiste à analyser les trajectoires de deux types de particules : celles qui flottent (roses et noirs) et celles qui coulent (jaunes). Pour ce faire, nous sommes dotés du dispositif expérimental suivant :



Dispositif expérimental spinup/spindown

Ce dispositif va nous permettre, à l'aide de la GOPRO fixé dans sur le plateau tournant, d'étudier la vitesse relative des différentes billes. Ceci nous permettra d'étudier à la fois les écoulements en surface et la couche limite de fond.

#### Question 8 :

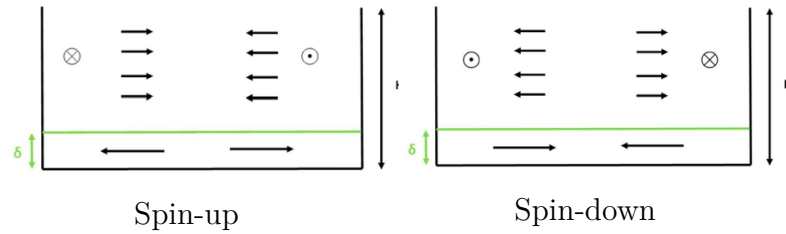
Dans le cas du **spinup** :

- Au fond de la cuve : Les billes suivent quasiment parfaitement le mouvement de la cuve.
- En surface de la cuve : Au début du spinup, les billes n'arrivent pas à suivre le mouvement de la cuve. Petit à petit, à l'aide de la force de Coriolis, les billes sont entraînées vers l'extérieur et les frottements du fond de la cuve.

Dans le cas du **spindown** :

- Au fond de la cuve : Les billes suivent quasiment parfaitement le mouvement de la cuve.

- En surface de la cuve : Au début du spindown, les billes n'arrivent pas à suivre le mouvement de la cuve. Petit à petit, à l'aide de la force de Coriolis, les billes sont entraînées vers l'intérieur et les frottements du fond de la cuve.



**Question 9,10 :**

Nous modifions le programme du tp « ProgRadial.m » pour :

- Effectuer un changement de repère : on place le
- repère au centre de la cuve
- Convertir les données en mètre
- Calculer les vitesses en cartésien
- Convertir les vitesses en polaire
- Calculer la vitesse réelle

Voici les manipulations effectuées sur le programme :

```

%---- On change l'origine pour la mettre au centre de la cuve

xi=xi-xc;
yi=yi-yc;
xf=xf-xc;
yf=yf-yc;

%---- Conversions des coord. pixels en coord? mètre

xi=xi*dL;
xf=xf*dL;
yi=yi*dL;
yf=yf*dL;

%---- Calcul composante de la vitesse (cartésiennes-->polaires)

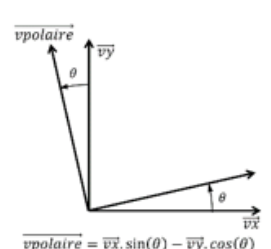
ri=sqrt(xi.^2+yi.^2) ;

thetai=atan(yi./xi); %Simple formule de trigo
thetaf=atan(yf./xf);
|
vx=(xf-xi)/Dt;
vy=(yf-yi)/Dt;

vitesse_polaire=vx.*sin(thetai)-vy.*cos(thetai);

d= ri.*(thetaf-thetai);
vitesse=d/Dt;

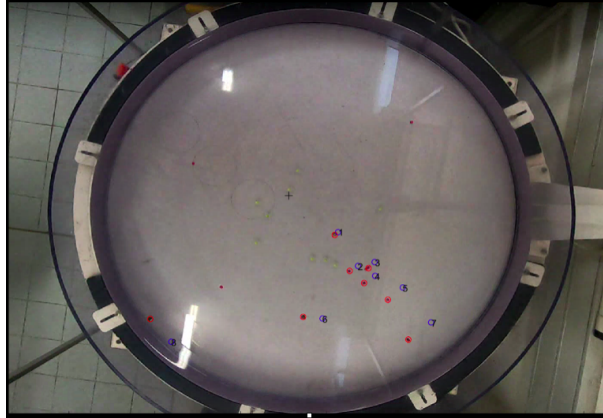
```



Changements sur le programme ProgRadial.m

**Question 11 :**

Comme indiqué dans l'énoncé, nous sélectionnons un couple d'images après environ 1 minute de spindown. Nous lançons ensuite le programme et effectuons le pointage de la manière suivante :



Pointage avec le programme Matlab

Ayant calculé dans le programme la vitesse en polaire ainsi que les différents rayons, nous traçons donc le profil de vitesse azimutale pour ce couple d'image :

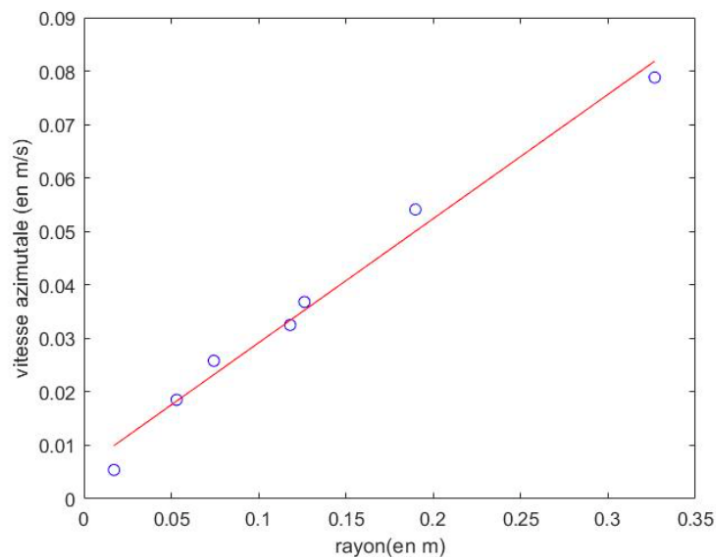


FIGURE 3 – profil de vitesse azimutal

Nous vérifions la linéarité du profil à l'aide d'une régression linéaire (tracé rouge)



et nous obtenons les coefficients suivants :  $a=0.2324$ ,  $b=0.0059$ . Nous avons un  $R= 0.9919$  ce qui valide la linéarité de modèle.

On remarque que le profil de vitesse azhimutale est linéaire et croissant. Bien évidemment, la vitesse relative est plus élevée aux extrémités de la cuve.

### Question 12 :

On a ensuite cherché à tracer l'évolution temporelle des profils de vitesse azhimutale en fonction du temps. Pour se faire, on a dans un premier temps créé des matrices et vecteurs permettant le stockage de différentes variables pour différents couples d'images :

- Des vecteurs contenant les coefficients de régression linéaire  $a, b$
- Un vecteur contenant le temps depuis le début que le spindown a commencé
- Une matrice contenant les différents rayons pour chaque couples d'images
- Une matrice contenant les différentes vitesses azhimutales pour chaque couples d'images

On a rempli ces données en effectuant une dizaine de pointages sur des couples d'images à différents instants du spindown.

Toutes ces données nous ont permit dans un premier temps de tracer différents profils de vitesse azhimutale à différents instants du spindown :

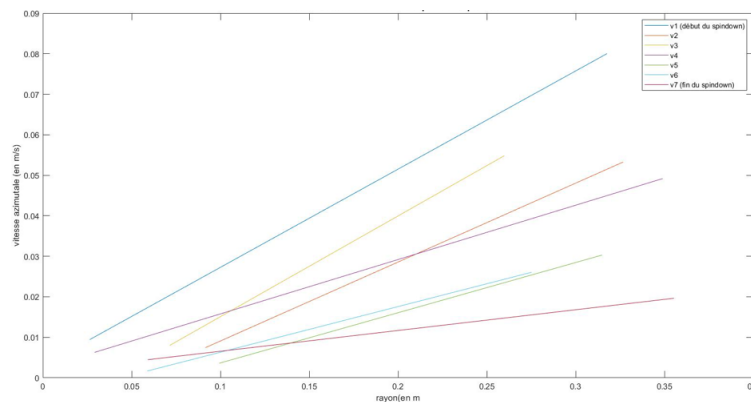


FIGURE 4 – profil de vitesse azhimutal en phase de spin-down

On observe sans surprise que la vitesse azhimutale diminue au cours du temps. Elle diminue jusqu'à atteindre une vitesse relative nulle où toutes les particules seront en phase avec le mouvement de la cuve.

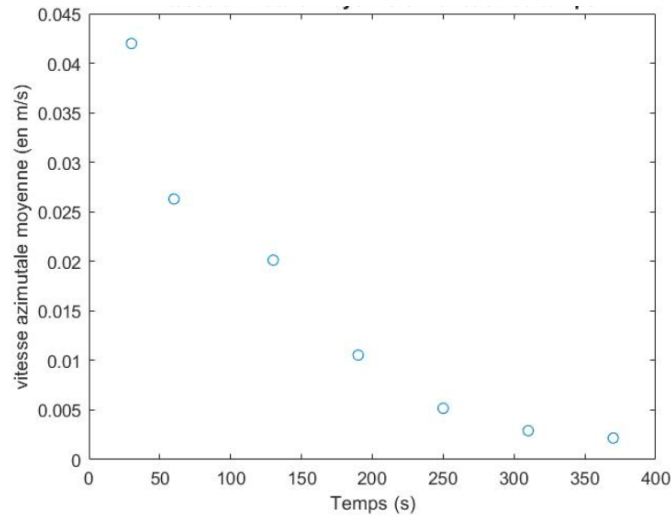


FIGURE 5 – Vitesse azimutal moyenne en fonction du temps

On a ensuite cherché à tracer la vitesse azimutale moyenne en fonction du temps :

On remarque une nouvelle fois la vitesse azimutale diminuent de manière parabolique : cela signifie que les vitesses varient plus au début puis tendent à se stabiliser vers la fin du spindown où elles devront être nulles.

### **Question 13 :**

Dans cette question, nous allons nous intéresser à l'évolution temporelle de la vitesse azimutale pour un rayon donnée. Ici nous prendrons le rayon  $30\text{cm}$  la où la vitesse est généralement maximal (voir figure 4).

Voici les courbes que nous avons obtenue :

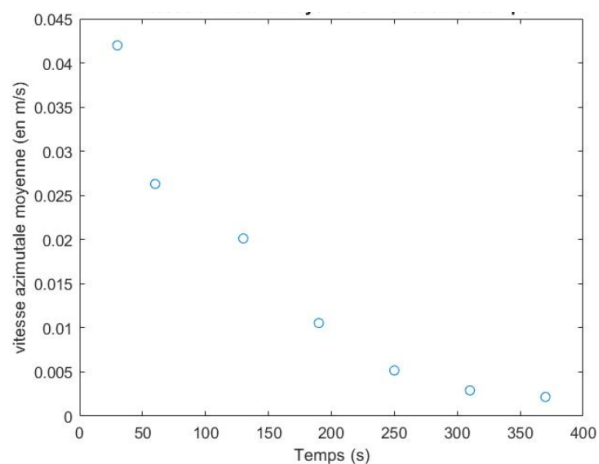


FIGURE 6 – Vitesse azimutal moyenne en fonction du temps

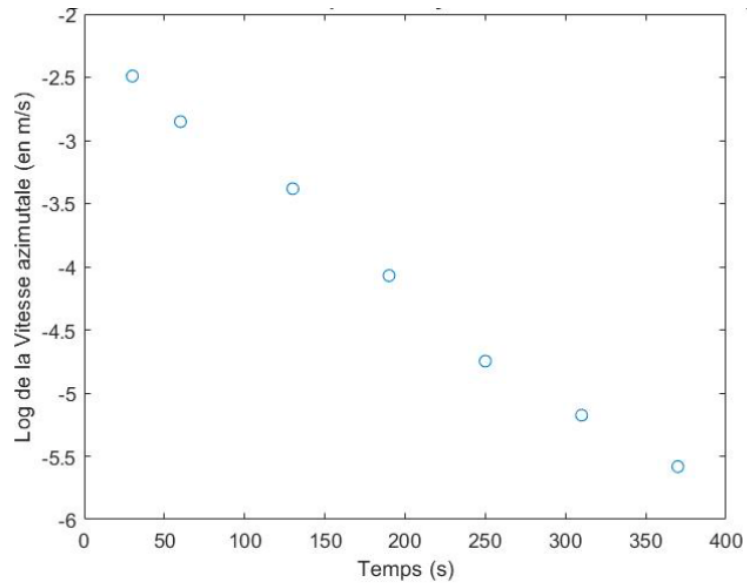


FIGURE 7 – logarithme de la vitesse azimutal moyenne en fonction du temps

### **13-a :**

Nous avons tracé le passage laminaire-transitionnel sur le premier graphique :

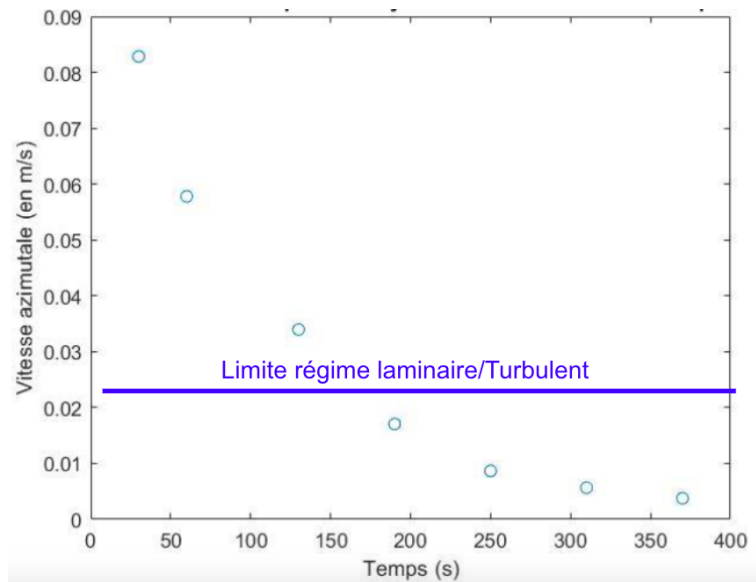


FIGURE 8 – Vitesse azimutal moyenne en fonction du temps

**13-b :**

En sélectionnant toute la partie laminaire de l'évolution, nous traçons en échelle logarithmique la vitesse azimutale pour un rayon donné en fonction du temps : La

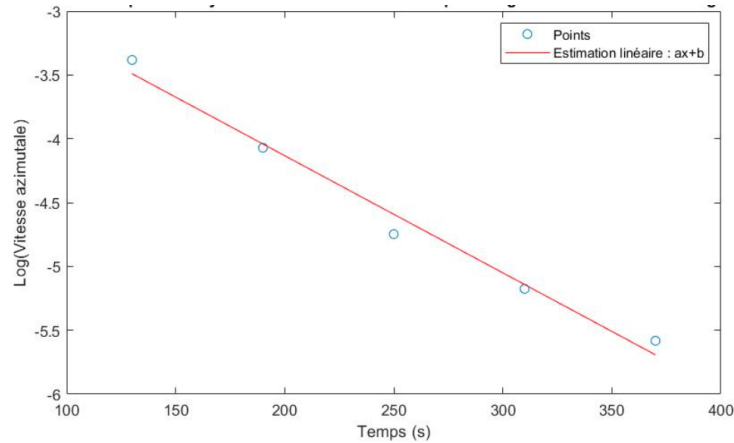


FIGURE 9 – Vitesse azimutal moyenne en fonction du temps

régression linéaire nous permet d'obtenir le coefficient  $a = -0.0092$ .

**13-c :**

En appliquant le logarithme au résultat de la question 4 :

$$\ln(U_\theta(r, t)) = \ln(U_\theta(r, 0)) - \frac{1}{\tau_e} t$$

D'abord en théorie on a :  $\tau_e = \frac{H\delta}{\mu} = 192s$

Et d'après le résultat de la régression linéaire :  $\tau_e = \frac{1}{a} = 109s$

On trouve des  $\tau_e$  théorique et expérimentaux qui ont le même ordre de grandeur : la minute. Les résultats ne sont donc pas aberrants. Cependant, il y a un écart assez conséquent entre les deux valeurs.

L'écart de ces valeurs peut venir de plusieurs facteurs comme :

- Le fait d'avoir négligé la vitesse radiale dans le modèle expérimental
- Les erreurs de précisions de pointage
- L'approximation de vitesse trop peu précise car les captures d'écran ne peuvent pas être prises avec un  $t$  suffisamment petit pour pouvoir assurer le pointage derrière.
- Le fait qu'il y a quelques sauts sur la vidéo de la GOPRO (sûrement un stabilisateur interne) dérégulant les mesures.

## 4 conclusion

Ce TP de mécanique des fluides visqueux nous a permis de mieux comprendre les mouvements des fluides dans une cuve en rotation. Nous avons étudié le régime transitoire pendant lequel nous avons augmenté brusquement la vitesse de rotation de la cuve ; cette phase est appelée spin-up. Lors du spin-up nous avons constaté que les billes situées sur le fond de la cuve s'éloignent du centre de rotation sous l'effet de la force de Coriolis sur le fluide. Lors de cette phase la vitesse de la cuve est transmise au fluide par frottement visqueux sur les parois latérales et sur le fond de la cuve jusqu'à ce que le régime de rotation solide soit établi. Cependant nos résultats expérimentaux doivent être analysés avec un regard critique au vu des approximations faites : pas temporel lors du calcul des vitesses, vitesse radiale considérée comme nulle « cf. Q7 ».