

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Ronan - Croguennec Guillaume

Seatech - Université de Toulon

Mai 2020

Sommaire

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

- 1 Introduction
- 2 Modélisation d'une épidémie
- 3 Résolution Numérique des modèles
- 4 Simulations et Résultats
- 5 Modèle topologique de la simulation
- 6 Conclusion
- 7 Bibliographie

Introduction

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

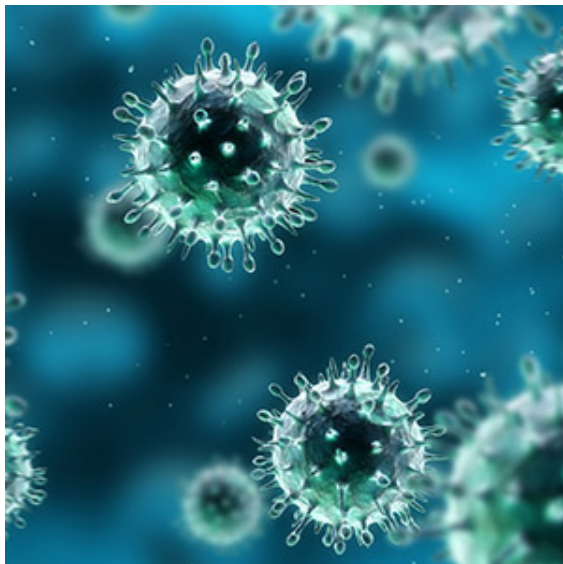
Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



SIR

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

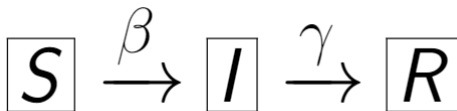
Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \end{cases}$$

SEIR

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

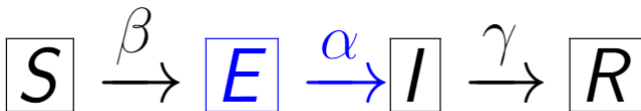
Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

SEIR natalité

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

SEIR natalité et mortalité

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

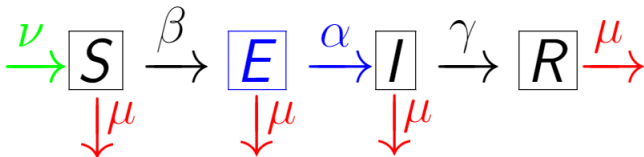
Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{array} \right.$$

SEIR Perte d'immunité

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

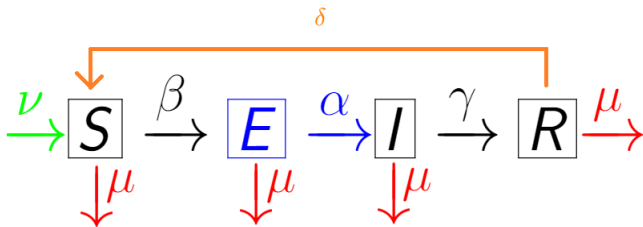
Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) + \delta R(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) - \delta R(t) \end{cases}$$

SEIR par tranche d'âge

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

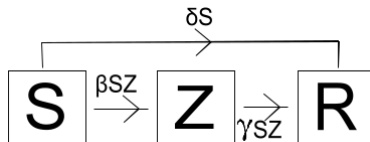
Bibliographie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(a, t)}{\partial a} = -\lambda(a, t)S(a, t) - \mu(a)S(a, t) \\ \frac{\partial E(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial E(a, t)}{\partial a} = \lambda(a, t)S(a, t) - \alpha(a)E(a, t) - \mu(a)E(a, t) \\ \frac{\partial I(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial I(a, t)}{\partial a} = \alpha(a)E(a, t) - \gamma(a)I(a, t) - \mu(a)I(a, t) \\ \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial a} = \gamma(a)I(a, t) - \mu(a)R(a, t) \end{array} \right.$$

$$\lambda(a, t) = \int_0^{a_{\max}} \beta(u, a)I(u, t)du$$

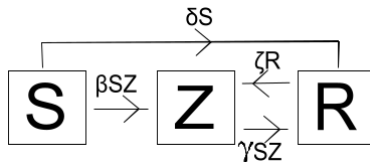
$$\beta(u, a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Modèle SZR : classique



$$(SIR) \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \end{cases} \quad (SZR) \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SZ \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \beta SZ - \gamma SZ \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma SZ \end{cases}$$

Modèle SZR avec taux de résurrection ϵ



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SZ \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \beta SZ - \gamma SZ + \epsilon R \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma SZ - \epsilon R \end{cases}$$

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

Ajout d'un terme de diffusion α_{diff}

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI + \alpha_{diff} \Delta S \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I + \alpha_{diff} \Delta I \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \end{cases}$$

Sans diffusion

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

**Modélisation
d'une
épidémie**

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

Avec diffusion : $\alpha_{diff} = 0.001$

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

Modèle explicite

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$S(x_i, t_n) = S_i^n = S(i.h, n.dt) \text{ et } I(x_i, t_n) = I_i^n = I(i.h, n.dt).$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{dt} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}(x_i, t_n) \approx \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{h^2}$$

Schéma numérique

$$\Rightarrow S_i^{n+1} = S_i^n + dt(-\beta S_i^n I_i^n + \frac{\alpha_{diff}}{h^2}(S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n))$$

$$\Rightarrow I_i^{n+1} = I_i^n + dt(-\gamma I_i^n + \beta S_i^n I_i^n + \frac{\alpha_{diff}}{h^2}(I_{i+1}^n - 2I_i^n + I_{i-1}^n))$$

$$\Rightarrow R_i^{n+1} = R_i^n + dt.\gamma.I_i^n$$

Modèle implicite

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{dt} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}(x_i, t_{n+1}) \approx \frac{S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

Schéma numérique

$$\Rightarrow S_i^{n+1} \left(1 + dt(\beta I_i^n + 2 \frac{\alpha_{diff}}{h^2}) \right) - \alpha_{diff} \frac{dt}{h^2} (S_{i+1}^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}) = S_i^n$$

$$\Rightarrow I_i^{n+1} \left(1 + dt(\gamma - \beta S_i^n + 2 \frac{\alpha_{diff}}{h^2}) \right) - \alpha_{diff} \frac{dt}{h^2} (I_{i+1}^{n+1} + I_{i-1}^{n+1}) = I_i^n$$

$$\Rightarrow R_i^{n+1} = R_i^n + dt \cdot \gamma \cdot I_i^n$$

Résolution 2D

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$\Delta S_{i,j}^n = \frac{S_{i+1,j}^n + S_{i-1,j}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i,j+1}^n + S_{i,j-1}^n}{h^2}$$

Résolution matriciel

$$\begin{cases} a_{li} = 1 + dt(-\beta S_i^n + 4 \frac{\alpha_{diff}}{h^2}) \\ b_i = -\alpha_{diff} \frac{dt}{h^2} \end{cases}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} a_{S_0} & b_i & & & & \\ & b_i & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & b_i \\ b_i & & & & & \ddots \\ & \ddots & & & & & \ddots \\ (0) & & b_i & & & & b_i & a_{S_{n^2-1}} \end{pmatrix} \quad b_S = \begin{pmatrix} S_0^n \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{m-1}^n \end{pmatrix} \quad x_S = \begin{pmatrix} S_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{m-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

SRZ : Influence du taux de résurrection ϵ

$$SRZ : \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SZ \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \beta SZ - \gamma SZ + \epsilon R \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma SZ - \epsilon R \end{cases}$$

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

**Simulations et
Résultats**

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

Influence des Conditions Initiales sur le résultat du modèle SZR

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

**Simulations et
Résultats**

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

Simulation du covid-19

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

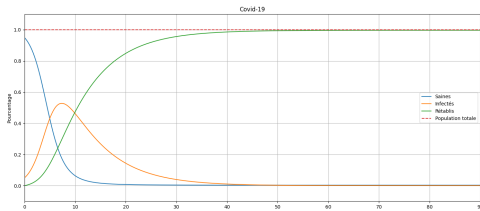
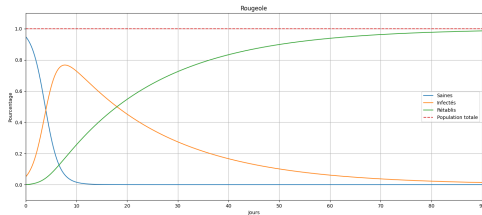
Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie

Maladie	β	γ	R_0
Rougeole	0.8	1/20	16
Covid-19	0.76	1/7.5	5.7



Résultat en incluant la topologie

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

**Modèle
topologique de
la simulation**

Conclusion

Bibliographie

Conclusion

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



Bibliographie

Simulation de
modèles
d'épidémie

Dupont
Croguennec

Introduction

Modélisation
d'une
épidémie

Résolution
Numérique
des modèles

Simulations et
Résultats

Modèle
topologique de
la simulation

Conclusion

Bibliographie



W. CHINVIRIYASIT, *Numerical modelling of an SIR epidemic model with diffusion*, 2010



Gloria FACANONI, *Etude des modèles SIR/SZR en temporel*, 2020



Coralie LEMKE, *Covid-19 : chaque malade pourrait-il vraiment en contaminer 5,7 autres ?*, Avril 2020



Max BERGGREN, *Model of a zombie outbreak in Sweden, Norway and Finland (Denmark is fine)*, Nov 27, 2014



Corentin BAYETTE, *Modélisation d'une épidémie, partie 2*, April 23, 2020

<https://images.math.cnrs.fr/>

[Modelisation-d-une-epidemie-partie-2.html](https://images.math.cnrs.fr/Modelisation-d-une-epidemie-partie-2.html)